SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO GIA LAI
TRƯỜNG CAO ĐẲNG SƯ PHẠM

TÀI LIỆU BỒI DƯỠNG THƯỜNG XUYÊN HÈ 2019

MÔN: TOÁN HỌC

Chuyên đề

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP THIẾT LẬP BÀI TOÁN HÌNH HỌC ĐỂ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI Ở BẬC TRUNG HỌC CƠ SỞ

TS. TRỊNH ĐÀO CHIẾN

Pleiku – Tháng 7/2019

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Tam giác là một khái niệm quan trọng trong chương trình Toán ở bậc Trung học cơ sở. Trong các đề thi chọn học sinh giỏi, tam giác thường có mặt và thường là những bài toán khó.

Trong các vấn đề về tam giác, bài toán cực trị luôn là những bài toán cơ bản, rất phong phú về dạng và khá hấp dẫn trong việc tìm tòi lời giải, đặc biệt là những lời giải có thể tổng quát hóa được.

Các tài liệu tham khảo hiện hành trong nước hiện nay, các bài toán về cực trị trong tam giác thường xuất hiện dưới dạng những bài toán khó với những lời giải rời rạc và chưa được phân loại một cách đầy đủ.

Trong quá trình bồi dưỡng thường xuyên cho giáo viên cốt cán, bồi dưỡng học sinh giỏi trong tỉnh và đặc biệt là quá trình giảng dạy học phần "Bồi dưỡng học sinh giỏi Trung học cơ sở - Chuyên đề Hình học" tại Trường Cao đẳng sư phạm Gia Lai cho sinh viên ngành Cao đẳng sư phạm Toán học, tôi đã tự nghiên cứu một cách khá toàn diện về vấn đề cực trị trong tam giác, trước hết là làm tư liệu giảng dạy cho bản thân, sau đó đúc rút thành một sản phẩm nghiên cứu khoa học nho nhỏ để có thể phổ biến kinh nghiệm này cho giảng viên, giáo viên, sinh viên, học sinh và những người quan tâm về vấn đề này.

Đây là một trong những tài liệu có thể được xem là khá đầy đủ, được phân dạng theo một hệ thống dễ tra cứu. Điều quan trọng của đề tài này là, nó cho thấy một trong những phương pháp tìm ra "cái gốc" của lớp các bài toán mà các tài liệu khác chưa phân tích được một cách đầy đủ.

Trong khuôn khổ số trang của một chuyên đề bồi dưỡng thường xuyên, đề tài này chưa đề cập đến Nhóm quan hệ 7, là nhóm quan hệ quan trọng (vừa khó, vừa sâu sắc) giữa R_a, R_b, R_c với d_a, d_b, d_c. Hy vọng rằng, đây sẽ là nội dung của một chuyên đề bồi dưỡng thường xuyên tiếp theo.

Phần 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Một số bất đẳng thức cần dùng

Đối với bậc Trung học cơ sở (THCS), theo chúng tôi, các bất đẳng thức sau đây là đủ để thiết lập khá nhiều bài toán Hình học để bồi dưỡng học sinh giỏi.

Các bất đẳng thức này có thể được hình thành từ các bước suy luận cơ bản.

Suy luận.

Ta có bất đẳng thức cơ bản sau

$$\boxed{\begin{array}{c} A^2 \geq 0 \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow A = 0 \end{array}}.$$

Với $x, y \geq 0$, ta có

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 1. (Bất đẳng thức AM-GM)

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \\ \forall x, y \geq 0 \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow x = y \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x + y \geq 2\sqrt{xy} \\ \forall x, y \geq 0 \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow x = y \end{array}}$$

Suy luận.

Áp dụng Bất đẳng thức 1, ta có

$x^2 + y^2 \geq 2xy$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

$y^2 + z^2 \geq 2yz$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = z$.

$z^2 + x^2 \geq 2zx$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $z = x$.

Suy ra

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 2\left(xy+yz+zx\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.

$$\boxed{\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx \\ \text{DTXR}\Leftrightarrow x=y=z \end{array}}$$

Suy luận.

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2\left(xy+yz+zx\right)\geq 3\left(xy+yz+zx\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x+y+z\right)^2\geq 3\left(xy+yz+zx\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 3.

$$\boxed{\begin{array}{c} \left(x+y+z\right)^2\geq 3\left(xy+yz+zx\right) \\ \text{DTXR}\Leftrightarrow x=y=z \end{array}}$$

Suy luận.

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 2\left(xy+yz+zx\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq x^2+y^2+z^2+2\left(xy+yz+zx\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\left(x+y+z\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 4.

$$\boxed{\begin{array}{c}3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge\left(x+y+z\right)^2\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow x=y=z\end{array}}\Leftrightarrow\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}\ge\dfrac{x+y+z}{3}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow x=y=z\end{array}}.$$

Bởi các Bất đẳng thức 3, 4, ta có bất đẳng thức kép sau

Bất đẳng thức 5.

$$\boxed{\begin{array}{c}3\left(xy+yz+zx\right)\le\left(x+y+z\right)^2\le3\left(x^2+y^2+z^2\right)\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow x=y=z\end{array}}$$

Trong Bất đẳng thức 5, với $x,y,z\ge0$, thay x bởi $\sqrt{x}$, y bởi $\sqrt{y}$, z bởi $\sqrt{z}$, ta có bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 6.

$$\boxed{\begin{array}{c}3\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)\le\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\le3\left(x+y+z\right)\\ \forall x,y,z\ge0\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow x=y=z\end{array}}$$

Suy luận.

Cách1.

Với mọi số thực $a,\ b,\ c$, ta có đồng nhất thức sau

$$a^3+b^3+c^3=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)+3abc.$$

Do đó, với $a,b,c\ge0$, ta có

$$a^3+b^3+c^3\ge3abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}a+b+c=0\\ a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=c=0\\ a=b=c\ \left(\text{theo BDT 2}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow a=b=c.$$

Thay $a\ge0$ bởi $\sqrt[3]{x}$, $b\ge0$ bởi $\sqrt[3]{y}$, $c\ge0$ bởi $\sqrt[3]{z}$, ta có bất đẳng thức sau

$$x+y+z\ge3.\sqrt[3]{xyz},\ \forall x,y,z\ge0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Cách 2.

Với $x, y, z \geq 0$, lần lượt áp dụng Bất đẳng thức 1, ta có

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

$z + \sqrt[3]{xyz} \geq 2\sqrt{z.\sqrt[3]{xyz}}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $z = \sqrt[3]{xyz}$.

Suy ra

$$x + y + z + \sqrt[3]{xyz} \geq 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{z.\sqrt[3]{xyz}} = 2\left(\sqrt{xy} + \sqrt{z.\sqrt[3]{xyz}}\right) \geq 2.2\sqrt{\sqrt{xy}.\sqrt{z.\sqrt[3]{xyz}}}$$

$$= 4.\sqrt{\sqrt{xyz\sqrt[3]{xyz}}} = 4.\sqrt[4]{\sqrt[3]{(xyz)^4}} = 4.\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{xyz}\right)^4} = 4\sqrt[3]{xyz}.$$

Vậy

$$x + y + z \geq 3.\sqrt[3]{xyz}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y \\ z = \sqrt[3]{xyz} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = \sqrt[3]{y^2 z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z^3 = y^2 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z\left(z^2 - y^2\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} z > 0 \\ x = y \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Từ một trong hai cách suy luận trên, ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 7. (Bất đẳng thức AM-GM)

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz},\ \forall x, y, z \geq 0 \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow x = y = z \end{array}}$$

Suy luận.

Với $x, y, z > 0$, áp dụng Bất đẳng thức 7, ta có

$$\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 3.\sqrt[3]{xyz}.3.\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 8.

$$\boxed{\begin{gathered}\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9\\ \forall x,y,z>0\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow x=y=z\end{gathered}}$$

Suy luận.

Với $x,y,z>0$, áp dụng Bất đẳng thức 7, ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\Leftrightarrow \sqrt[3]{xyz}\geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 9.

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt[3]{xyz}\geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\\ \forall x,y,z>0\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow x=y=z\end{gathered}}$$

Bởi các Bất đẳng thức 4, 7, 9, ta có bất đẳng thức kép sau

Bất đẳng thức 10. (Bất đẳng thức giữa các đại lượng trung bình)

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \le \sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \\ \forall x,y,z>0 \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow x=y=z\end{gathered}}$$

Suy luận.

Với các số thực a,b,c,x,y,z, dễ dàng kiểm tra được Hằng đẳng thức Lagrange sau đây

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(ax+by+cz\right)^2+\left(ay-bx\right)^2+\left(bz-cy\right)^2+\left(cx-az\right)^2.$$

Từ hằng đẳng thức này, ta suy ra bất đẳng thức sau đây

Bất đẳng thức 11. (BĐT Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz hay BĐT C-B-S)

$$\boxed{\begin{gathered}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge\left(ax+by+cz\right)^2 \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\ \left(x,y,z\ne 0\right)\end{gathered}}$$

Suy luận.

Với $a,b,c\in\mathbb{R}$, $x,y,z>0$, áp dụng Bất đẳng thức 11, ta có

$$\left(\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{z}}\right)^2\right).\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)\left(x+y+z\right)\ge\left(a+b+c\right)^2\Leftrightarrow\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{x+y+z}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a^2}{x^2}=\frac{b^2}{y^2}=\frac{c^2}{z^2}\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 12.

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\\ \forall a,b,c\in\mathbb{R};\ \forall x,y,z>0\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}\end{array}}$$

Suy luận.

Với $a,b,c,x,y,z>0$, trong Bất đẳng thức 12, thay x bởi ax, y bởi by, z bởi cz, ta có

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a=b=c\\x=y=z\end{cases}.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 13.

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}\\ \forall a,b,c,x,y,z>0\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c\\x=y=z\end{cases}\end{array}}$$

Suy luận.

Với $a,b,c,x,y,z>0$, áp dụng các Bất đẳng thức 12, 13, ta có

$$\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}+\frac{c}{z^2}=\frac{a^2}{ax^2}+\frac{b^2}{by^2}+\frac{c^2}{cz^2}=\frac{\left(\frac{a}{x}\right)^2}{a}+\frac{\left(\frac{b}{y}\right)^2}{b}+\frac{\left(\frac{c}{z}\right)^2}{c}\ge\frac{\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)^2}{a+b+c}$$

$$\ge\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)^2\ge\frac{1}{a+b+c}.\frac{(a+b+c)^4}{(ax+by+cz)^2}=\frac{(a+b+c)^3}{(ax+by+cz)^2}.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

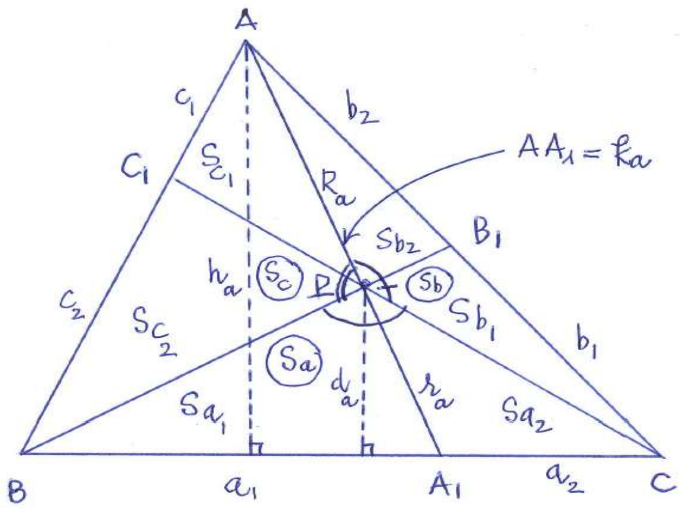
Bất đẳng thức 14.

$$\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}+\frac{c}{z^2}\ge\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)^2\ge\frac{(a+b+c)^3}{(ax+by+cz)^2}$$

$$\forall a,b,c,x,y,z>0$$

$$\text{DTXR}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c\\x=y=z\end{cases}$$

1.2. Một số ký hiệu



Cho tam giác *ABC* và điểm P nằm trong tam giác đó. Giả sử *AP, BP, CP* lần lượt cắt *BC, CA, AB* tại A_1, B_1, C_1.

Gọi $h_a,\ h_b,\ h_c$ lần lượt là các đường cao hạ từ *A, B, C* và $d_a,\ d_b,\ d_c$ lần lượt là các đoạn vuông góc hạ từ *P* đến *BC, CA, AB.*

Ta sử dụng các ký hiệu sau

$$\boxed{S_{ABC}=S},\ \boxed{S_{BPC}=S_a},\ \boxed{S_{CPA}=S_b},\ \boxed{S_{APB}=S_c},$$

$$\boxed{AA_1=k_a},\ \boxed{BB_1=k_b},\ \boxed{CC_1=k_c},$$

$$\boxed{AP=R_a},\ \boxed{BP=R_b},\ \boxed{CP=R_c},$$

$$\boxed{PA_1=r_a},\ \boxed{PB_1=r_b},\ \boxed{PC_1=r_c},$$

$$\boxed{x=\frac{r_a}{k_a}},\ \boxed{y=\frac{r_b}{k_b}},\ \boxed{z=\frac{r_c}{k_c}},$$

$$\boxed{S(B_1AC_1)=\overline{S}_a},\ \boxed{S(C_1BA_1)=\overline{S}_b},\ \boxed{S(A_1CB_1)=\overline{S}_c},\ \boxed{S(A_1B_1C_1)=S^*}.$$

Phần 2. THIẾT LẬP CÁC NHÓM QUAN HỆ

2.1. Nhóm quan hệ 1

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất (khá đầy đủ) các mối liên hệ giữa $r_a,\ r_b,\ r_c,\ k_a,\ k_b,\ k_c,\ d_a,\ d_b,\ d_c,\ h_a,\ h_b,\ h_c,\ S_a,\ S_b,\ S_c,\ S$, gọi tắt là

<u>Nhóm quan hệ:</u> $\boxed{(r_a,\ k_a)}$

Đây có thể xem là phương pháp "gốc", tổng quát nhất, mà các mối liên hệ trong các tài liệu trong nước hiện hành chỉ là các trường hợp riêng.

Dễ dàng chứng minh rằng

$$\frac{S_a}{S}=\frac{d_a}{h_a}=\frac{r_a}{k_a},\ \frac{S_b}{S}=\frac{d_b}{h_b}=\frac{r_b}{k_b},\ \frac{S_c}{S}=\frac{d_c}{h_c}=\frac{r_c}{k_c}.$$

Đặt

$$\boxed{\frac{S_a}{S}=\frac{d_a}{h_a}=\frac{r_a}{k_a}=x>0},\ \boxed{\frac{S_b}{S}=\frac{d_b}{h_b}=\frac{r_b}{k_b}=y>0},\ \boxed{\frac{S_c}{S}=\frac{d_c}{h_c}=\frac{r_c}{k_c}=z>0}.$$

Ta có

$$x+y+z=\frac{S_a}{S}+\frac{S_b}{S}+\frac{S_c}{S}=\frac{S_a+S_b+S_c}{S}=\frac{S}{S}=1.$$

Vậy, ta có đẳng thức cơ bản sau

Đẳng thức 1.

$$\boxed{\begin{cases}x,y,z\in(0,1)\\ x+y+z=1\end{cases}}.$$

Bởi Đẳng thức 1, ta có một số đẳng thức cụ thể như sau

Đẳng thức 1a.

$$\boxed{\frac{S_a}{S}+\frac{S_b}{S}+\frac{S_c}{S}=1}.$$

Đẳng thức 1b.

$$\boxed{\frac{d_a}{h_a}+\frac{d_b}{h_b}+\frac{d_c}{h_c}=1}.$$

Đẳng thức 1c.

$$\boxed{\frac{r_a}{k_a}+\frac{r_b}{k_b}+\frac{r_c}{k_c}=1}.$$

Áp dụng Đẳng thức 1 vào các bất đẳng thức có chứa tổng $x+y+z$, ta thiết lập được nhiều bất đẳng thức trong tam giác.

Suy luận.

Áp dụng Đẳng thức 1 vào Bất đẳng thức 8, ta có

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9 \text{ hay } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau đây

Bất đẳng thức 15.

$$\boxed{\begin{array}{c}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}\end{array}}.$$

Bởi Bất đẳng thức 15, ta có một số bất đẳng thức cụ thể như sau

Bất đẳng thức 15a.

$$\boxed{\begin{array}{c}\frac{1}{S_a}+\frac{1}{S_b}+\frac{1}{S_c}\geq\frac{9}{S}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Bất đẳng thức 15b

$$\boxed{\begin{array}{c}\frac{h_a}{d_a}+\frac{h_b}{d_b}+\frac{h_c}{d_c}\geq 9\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Bất đẳng thức 15c.

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{k_a}{r_a}+\dfrac{k_b}{r_b}+\dfrac{k_c}{r_c}\ge 9\\ \text{DTXR} \Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Suy luận.

Áp dụng Đẳng thức 1 vào Bất đẳng thức 5, ta có

$$3(xy+yz+zx)\le (x+y+z)^2\le 3(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow 3(xy+yz+zx)\le 1\le 3(x^2+y^2+z^2).$$

Các đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x=y=z=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{r_a}{k_a}=\frac{r_b}{k_b}=\frac{r_c}{k_c}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow P\equiv G.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau đây

Bất đẳng thức 16.

$$\boxed{\begin{array}{c}xy+yz+zx\le \dfrac{1}{3}\\ \text{DTXR} \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}\end{array}}.$$

Bởi Bất đẳng thức 16, ta có một số bất đẳng thức cụ thể như sau

Bất đẳng thức 16a.

$$\boxed{\begin{array}{c}S_aS_b+S_bS_c+S_cS_a\le \dfrac{S^2}{3}\\ \text{DTXR} \Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Bất đẳng thức 16b.

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{d_ad_b}{h_ah_b}+\dfrac{d_bd_c}{h_bh_c}+\dfrac{d_cd_a}{h_ch_a}\le \dfrac{1}{3}\\ \text{DTXR} \Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Bất đẳng thức 16c.

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{r_ar_b}{k_ak_b}+\dfrac{r_br_c}{k_bk_c}+\dfrac{r_cr_a}{k_ck_a}\le \dfrac{1}{3}\\ \text{DTXR} \Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Ta cũng thiết lập được bất đẳng thức sau đây

Bất đẳng thức 17.

$$\boxed{\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2 \ge \dfrac{1}{3} \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3} \end{array}}$$

Bởi Bất đẳng thức 17, ta có một số bất đẳng thức cụ thể như sau

Bất đẳng thức 17a.

$$\boxed{\begin{array}{c} S_a{}^2+S_b{}^2+S_c{}^2 \ge \dfrac{S^2}{3} \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow P \equiv G \end{array}}.$$

Bất đẳng thức 17b.

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{d_a{}^2}{h_a{}^2}+\dfrac{d_b{}^2}{h_b{}^2}+\dfrac{d_c{}^2}{h_c{}^2} \ge \dfrac{1}{3} \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow P \equiv G \end{array}}.$$

Bất đẳng thức 17c.

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{r_a{}^2}{k_a{}^2}+\dfrac{r_b{}^2}{k_b{}^2}+\dfrac{r_c{}^2}{k_c{}^2} \ge \dfrac{1}{3} \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow P \equiv G \end{array}}.$$

Suy luận.

Áp dụng Đẳng thức 1 vào Bất đẳng thức 6, ta có

$$3\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right) \le \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 \le 3(x+y+z)=3.$$

Các đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x=y=z=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{r_a}{k_a}=\frac{r_b}{k_b}=\frac{r_c}{k_c}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow P \equiv G.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau đây

Bất đẳng thức 18.

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\le 1\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}\end{array}}.$$

Bởi Bất đẳng thức 18, ta có một số bất đẳng thức cụ thể như sau

Bất đẳng thức 18a.

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{S_aS_b}+\sqrt{S_bS_c}+\sqrt{S_cS_a}\le S\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Bất đẳng thức 18b.

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{\dfrac{d_ad_b}{h_ah_b}}+\sqrt{\dfrac{d_bd_c}{h_bh_c}}+\sqrt{\dfrac{d_cd_a}{h_ch_a}}\le 1\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Bất đẳng thức 18c.

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{\dfrac{r_ar_b}{k_ak_b}}+\sqrt{\dfrac{r_br_c}{k_bk_c}}+\sqrt{\dfrac{r_cr_a}{k_ck_a}}\le 1\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Ta cũng thiết lập được bất đẳng thức sau đây

Bất đẳng thức 19.

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{3}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}\end{array}}.$$

Bởi Bất đẳng thức 19, ta có một số bất đẳng thức cụ thể như sau

Bất đẳng thức 19a.

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{S_a}+\sqrt{S_b}+\sqrt{S_c}\le\sqrt{3S}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Bất đẳng thức 19b.

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{\dfrac{d_a}{h_a}}+\sqrt{\dfrac{d_b}{h_b}}+\sqrt{\dfrac{d_c}{h_c}}\le\sqrt{3}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Bất đẳng thức 19c.

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{\dfrac{r_a}{k_a}}+\sqrt{\dfrac{r_b}{k_b}}+\sqrt{\dfrac{r_c}{k_c}}\le\sqrt{3}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}$$

Suy luận.

Bây giờ, bởi Đẳng thức 1 và Bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$1=x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau đây

Bất đẳng thức 20.

$$\boxed{\begin{array}{c}xyz\le\dfrac{1}{27}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}\end{array}}.$$

Bởi Bất đẳng thức 20, ta có một số bất đẳng thức cụ thể như sau

Bất đẳng thức 20a.

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{S_aS_bS_c}\le\dfrac{S}{3}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Bất đẳng thức 20b.

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{d_ad_bd_c}{h_ah_bh_c}\le\dfrac{1}{27}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Bất đẳng thức 20c.

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{r_a r_b r_c}{k_a k_b k_c} \le \dfrac{1}{27} \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow P \equiv G\end{array}}.$$

2.2. Nhóm quan hệ 2

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất (khá đầy đủ) các mối liên hệ giữa R_a, R_b, R_c, k_a, k_b, k_c, gọi tắt là

Nhóm quan hệ: $\boxed{(R_a,\, k_a)}$

Suy luận.

Ta có

$$\frac{R_a}{k_a} = \frac{k_a - r_a}{k_a} = 1 - \frac{r_a}{k_a} = 1 - x.$$

Tương tự, ta có

$$\boxed{\frac{R_a}{k_a} = 1 - x},\ \boxed{\frac{R_b}{k_b} = 1 - y},\ \boxed{\frac{R_c}{k_c} = 1 - z}.$$

Suy ra

$$\frac{R_a}{k_a} + \frac{R_b}{k_b} + \frac{R_c}{k_c} = (1-x) + (1-y) + (1-z) = 3 - (x+y+z) = 3 - 1 = 2$$

Vậy, ta có đẳng thức cơ bản sau

Đẳng thức 2.

$$\boxed{\frac{R_a}{k_a} + \frac{R_b}{k_b} + \frac{R_c}{k_c} = 2} \text{ hay } \boxed{\frac{R_a}{2k_a} + \frac{R_b}{2k_b} + \frac{R_c}{2k_c} = 1}$$

Suy luận.

Ta có

$$\boxed{\frac{k_a}{R_a} = \frac{1}{1-x}},\ \boxed{\frac{k_b}{R_b} = \frac{1}{1-y}},\ \boxed{\frac{k_c}{R_c} = \frac{1}{1-z}}.$$

Do đó

$$\frac{k_a}{R_a}+\frac{k_b}{R_b}+\frac{k_c}{R_c}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}$$

Ta cần thiết lập bất đẳng thức liên quan đến biểu thức

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}.$$

Áp dụng Bất đẳng thức 8, ta có

$$\left((1-x)+(1-y)+(1-z)\right).\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\right)\geq 9$$

$$\Leftrightarrow \left(3-(x+y+z)\right).\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\right)\geq 9$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\right)\geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\geq\frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$1-x=1-y=1-z \text{ hay } x=y=z=\frac{1}{3}.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau đây

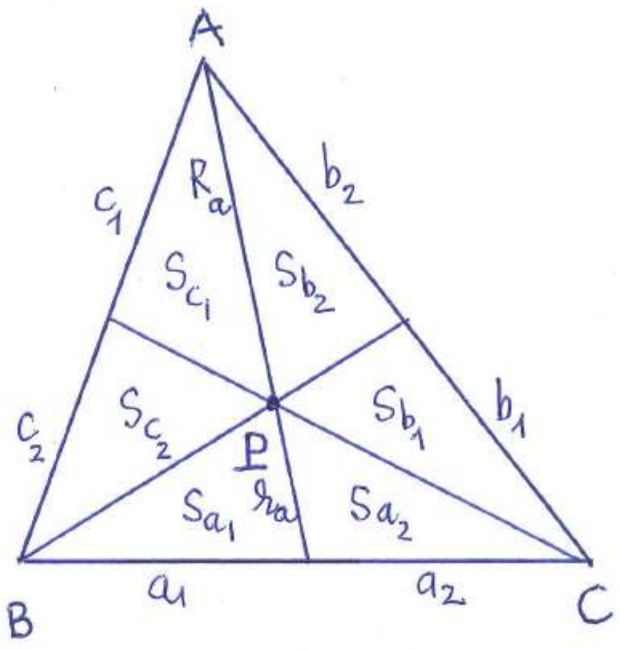
Bất đẳng thức 21.

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{1}{1-z}\geq\dfrac{9}{2}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}\end{array}} \text{ hay } \boxed{\begin{array}{c}\dfrac{k_a}{R_a}+\dfrac{k_b}{R_b}+\dfrac{k_c}{R_c}\geq\dfrac{9}{2}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow\dfrac{r_a}{k_a}=\dfrac{r_b}{k_b}=\dfrac{r_c}{k_c}=\dfrac{1}{3}\\ \Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

2.3. Nhóm quan hệ 3

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất (khá đầy đủ) các mối liên hệ giữa R_a, R_b, R_c, r_a, r_b, r_c, S_a, S_b, S_c, S, gọi tắt là

<u>Nhóm quan hệ:</u> $\boxed{(R_a,\ r_a)}$



Bài toán 1. Chứng minh rằng trong các số

$$\frac{R_a}{r_a}, \frac{R_b}{r_b}, \frac{R_c}{r_c},$$

có ít nhất một số không nhỏ hơn 2 và có ít nhất một số không lớn hơn 2.

Giải.

a) Có ít nhất một số không nhỏ hơn 2.

Giả sử ngược lại, các số đều nhỏ hơn 2. Ta có

$$\frac{S_c}{S_{a_1}} = \frac{R_a}{r_a} < 2 \Rightarrow \frac{S_c}{S_{a_1}} < 2 \Rightarrow S_c < 2S_{a_1}.$$

Tương tự, ta có

$$S_b < 2S_{a_2}.$$

Suy ra

$$S_c + S_b < 2S_{a_1} + 2S_{a_2} = 2\left(S_{a_1} + S_{a_2}\right) = 2S_a.$$

Tương tự, ta có

$$S_c + S_b < 2S_a,\ S_a + S_c < 2S_b,\ S_b + S_a < 2S_c.$$

Cộng các bất đẳng thức theo vế, ta có

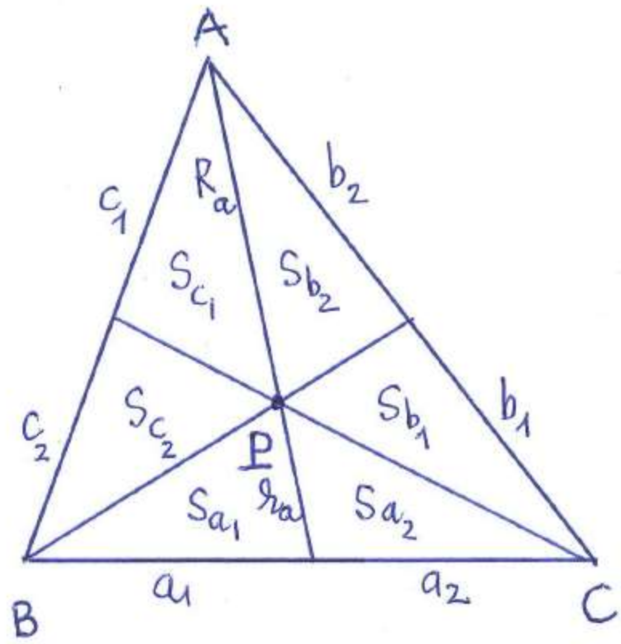
$$2(S_a + S_b + S_c) < 2(S_a + S_b + S_c) \Leftrightarrow 2S < 2S,$$

mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh.

b) Có ít nhất một số không lớn hơn 2.

Chứng minh tương tự.

Suy luận.



Ta có

$$\frac{R_a}{r_a} = \frac{S_c}{S_{a_1}} = \frac{S_b}{S_{a_2}} = \frac{S_b + S_c}{S_{a_1} + S_{a_2}} = \frac{S_b + S_c}{S_a}.$$

Vậy, ta có đẳng thức cơ bản sau

Đẳng thức 3.

$$\boxed{\frac{R_a}{r_a} = \frac{S_b + S_c}{S_a}}.$$

Ta có

$$\frac{R_a}{r_a} = \frac{S_b + S_c}{S_a} = \frac{S_b}{S_a} + \frac{S_c}{S_a} = \frac{c_1}{c_2} + \frac{b_2}{b_1}.$$

Vậy, ta có đẳng thức cơ bản sau

Đẳng thức 4.

$$\boxed{\frac{R_a}{r_a} = \frac{c_1}{c_2} + \frac{b_2}{b_1}}.$$

Suy luận.

Ta có

$$\frac{R_a}{r_a} = \frac{k_a - r_a}{r_a} = \frac{k_a}{r_a} - 1 = \frac{1}{x} - 1.$$

Tương tự, ta có

$$\boxed{\frac{R_a}{r_a} = \frac{1}{x} - 1}, \boxed{\frac{R_b}{r_b} = \frac{1}{y} - 1}, \boxed{\frac{R_c}{r_c} = \frac{1}{z} - 1}.$$

Vậy, bởi Bất đẳng thức 15, ta có

$$\frac{R_a}{r_a} + \frac{R_b}{r_b} + \frac{R_c}{r_c} = \left(\frac{1}{x} - 1\right) + \left(\frac{1}{y} - 1\right) + \left(\frac{1}{z} - 1\right) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3 \geq 9 - 3 = 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau đây

Bất đẳng thức 22.

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{R_a}{r_a} + \frac{R_b}{r_b} + \frac{R_c}{r_c} \geq 6 \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow \frac{r_a}{k_a} = \frac{r_b}{k_b} = \frac{r_c}{k_c} = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow P \equiv G \end{array}}.$$

Suy luận.

Ta có

$$\frac{r_a}{R_a} = \frac{x}{1-x} = \frac{1-(1-x)}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1.$$

Tương tự, ta có

$$\boxed{\frac{r_a}{R_a} = \frac{1}{1-x} - 1}, \boxed{\frac{r_b}{R_b} = \frac{1}{1-y} - 1}, \boxed{\frac{r_c}{R_c} = \frac{1}{1-z} - 1}.$$

Vậy, bởi Bất đẳng thức 21, ta có

$$\frac{r_a}{R_a} + \frac{r_b}{R_b} + \frac{r_c}{R_c} = \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) + \left(\frac{1}{1-y} - 1\right) + \left(\frac{1}{1-z} - 1\right) = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z}\right) - 3 \ge \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau đây

Bất đẳng thức 23.

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{r_a}{R_a} + \dfrac{r_b}{R_b} + \dfrac{r_c}{R_c} \ge \dfrac{3}{2} \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow \dfrac{r_a}{k_a} = \dfrac{r_b}{k_b} = \dfrac{r_c}{k_c} = \dfrac{1}{3} \\ \Leftrightarrow P \equiv G \end{array}}.$$

2.4. Nhóm quan hệ 4

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất (khá đầy đủ) các mối liên hệ giữa a, b, c, d_a, d_b, d_c, S_a, S_b, S_c, S, gọi tắt là

<u>Nhóm quan hệ:</u> $\boxed{(a,\ d_a)}$

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC. Xác định điểm P nằm trong (hoặc trên cạnh) tam giác ABC sao cho tổng* $d_a + d_b + d_c$ *nhỏ nhất.*

Giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Ta có

$$2S = ad_a + bd_b + cd_c \le ad_a + ad_b + ad_c = a(d_a + d_b + d_c).$$

Suy ra

$$d_a + d_b + d_c \ge \frac{2S}{a} = h_a.$$

Vậy, nếu a là cạnh lớn nhất thì ta có

Bất đẳng thức 24.

$$\boxed{d_a + d_b + d_c \ge h_a}.$$

- Nếu $a = b = c$, thì giá trị nhỏ nhất của tổng $d_a + d_b + d_c$ là h_a, đạt được khi và chỉ khi điểm P nằm ở một vị trí bất kỳ trong (hoặc trên cạnh) tam giác ABC.

- Nếu $a = b > c$, thì giá trị nhỏ nhất của tổng $d_a + d_b + d_c$ là h_a, đạt được khi và chỉ khi $d_c = 0$, nghĩa là điểm P nằm trên cạnh CA, cạnh nhỏ nhất.

- Nếu $a > b \ge c$, thì giá trị nhỏ nhất của tổng $d_a + d_b + d_c$ là h_a, đạt được khi và chỉ khi $d_b = d_c = 0$, nghĩa là điểm P trùng với đỉnh A.

Suy luận.

Áp dụng Bất đẳng thức 8, ta có

$$(ad_a + bd_b + cd_c)\left(\frac{1}{ad_a} + \frac{1}{bd_b} + \frac{1}{cd_c}\right) \ge 9 \Leftrightarrow (2S_a + 2S_b + 2S_c)\left(\frac{1}{ad_a} + \frac{1}{bd_b} + \frac{1}{cd_c}\right) \ge 9$$

$$\Leftrightarrow 2S\left(\frac{1}{ad_a} + \frac{1}{bd_b} + \frac{1}{cd_c}\right) \ge 9 \Leftrightarrow \frac{1}{ad_a} + \frac{1}{bd_b} + \frac{1}{cd_c} \ge \frac{9}{2S}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$ad_a = bd_b = cd_c \Leftrightarrow 2S_a = 2S_b = 2S_c \Leftrightarrow S_a = S_b = S_c \Leftrightarrow P \equiv G.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 25.

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{1}{ad_a} + \dfrac{1}{bd_b} + \dfrac{1}{cd_c} \ge \dfrac{9}{2S} \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow ad_a = bd_b = cd_c \Leftrightarrow P \equiv G \end{array}}.$$

Suy luận.

Nếu tam giác ABC là tam giác đều, thì Bất đẳng thức 25 tương đương với

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}\right)\ge\frac{9}{2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{6\sqrt{3}}{a^2}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}\ge\frac{6\sqrt{3}}{a}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $d_a=d_b=d_c$ hay $P\equiv I\equiv O\equiv H\equiv G$.

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 26. (ABC là tam giác đều)

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{1}{d_a}+\dfrac{1}{d_b}+\dfrac{1}{d_c}\ge\dfrac{6\sqrt{3}}{a}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow d_a=d_b=d_c\Leftrightarrow P\equiv I\equiv O\equiv H\equiv G\end{array}}.$$

Suy luận.

Áp dụng Bất đẳng thức 8, ta có

$$\left((ad_a+bd_b)+(bd_b+cd_c)+(cd_c+ad_a)\right)\left(\frac{1}{ad_a+bd_b}+\frac{1}{bd_b+cd_c}+\frac{1}{cd_c+ad_a}\right)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow 2(ad_a+bd_b+cd_c)\left(\frac{1}{ad_a+bd_b}+\frac{1}{bd_b+cd_c}+\frac{1}{cd_c+ad_a}\right)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow 4S\left(\frac{1}{ad_a+bd_b}+\frac{1}{bd_b+cd_c}+\frac{1}{cd_c+ad_a}\right)\ge 9\Leftrightarrow\frac{1}{ad_a+bd_b}+\frac{1}{bd_b+cd_c}+\frac{1}{cd_c+ad_a}\ge\frac{9}{4S}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$ad_a=bd_b=cd_c\Leftrightarrow 2S_a=2S_b=2S_c\Leftrightarrow S_a=S_b=S_c\Leftrightarrow P\equiv G.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 27.

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{1}{ad_a+bd_b}+\dfrac{1}{bd_b+cd_c}+\dfrac{1}{cd_c+ad_a}\ge\dfrac{9}{4S}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow ad_a=bd_b=cd_c\Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Suy luận.

Nếu tam giác ABC là tam giác đều, thì Bất đẳng thức 27 tương đương với

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{d_a+d_b}+\frac{1}{d_b+d_c}+\frac{1}{d_c+d_a}\right)\geq\frac{9}{4S}\Leftrightarrow\frac{1}{d_a+d_b}+\frac{1}{d_b+d_c}+\frac{1}{d_c+d_a}\geq\frac{9a}{4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{a}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $d_a=d_b=d_c$ hay $P\equiv I\equiv O\equiv H\equiv G$.

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 28. (ABC là tam giác đều)

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{1}{d_a+d_b}+\dfrac{1}{d_b+d_c}+\dfrac{1}{d_c+d_a}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{a}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow d_a=d_b=d_c\Leftrightarrow P\equiv I\equiv O\equiv H\equiv G\end{array}}.$$

Suy luận.

Ta có

$$\left(ad_a+bd_b+cd_c\right)\left(\frac{a}{d_a}+\frac{b}{d_b}+\frac{c}{d_c}\right)=\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$+ab\left(\frac{d_a}{d_b}+\frac{d_b}{d_a}\right)+bc\left(\frac{d_b}{d_c}+\frac{d_c}{d_b}\right)+ca\left(\frac{d_c}{d_a}+\frac{d_a}{d_c}\right)$$

$$\overset{\text{AM-GM}}{\geq}\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(ab+bc+ca\right)=\left(a+b+c\right)^2.$$

Suy ra

$$\left(ad_a+bd_b+cd_c\right)\left(\frac{a}{d_a}+\frac{b}{d_b}+\frac{c}{d_c}\right)\geq\left(a+b+c\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(2S_a+2S_b+2S_c\right)\left(\frac{a}{d_a}+\frac{b}{d_b}+\frac{c}{d_c}\right)\geq\left(a+b+c\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(S_a+S_b+S_c\right)\left(\frac{a}{d_a}+\frac{b}{d_b}+\frac{c}{d_c}\right)\geq\left(a+b+c\right)^2\Leftrightarrow 2S\left(\frac{a}{d_a}+\frac{b}{d_b}+\frac{c}{d_c}\right)\geq\left(a+b+c\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{d_a}+\frac{b}{d_b}+\frac{c}{d_c}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2S}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $d_a = d_b = d_c$ hay $P \equiv I$.

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 29.

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{a}{d_a} + \dfrac{b}{d_b} + \dfrac{c}{d_c} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{2S} \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow d_a = d_b = d_c \Leftrightarrow P \equiv I \end{array}}.$$

Nhận xét. Bất đẳng thức trên còn có thể chứng minh, dựa vào Bất đẳng thức 13, như sau

$$\frac{a}{d_a} + \frac{b}{d_b} + \frac{c}{d_c} \ge \frac{(a+b+c)^2}{ad_a + bd_b + cd_c} = \frac{(a+b+c)^2}{2S_a + 2S_b + 2S_c} = \frac{(a+b+c)^2}{2(S_a + S_b + S_c)} = \frac{(a+b+c)^2}{2S}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $d_a = d_b = d_c$ hay $P \equiv I$.

Suy luận.

Theo Bất đẳng thức C-B-S, ta có

$$(a^2 + b^2 + c^2)(d_a{}^2 + d_b{}^2 + d_c{}^2) \ge (ad_a + bd_b + cd_c)^2 = (2S_a + 2S_b + 2S_c)^2 = 4S^2.$$

Suy ra

$$d_a{}^2 + d_b{}^2 + d_c{}^2 \ge \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{d_a}{a} = \frac{d_b}{b} = \frac{d_c}{c} \Leftrightarrow \text{P là Điểm Lemoine của tam giác.}$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 30.

$$\boxed{\begin{array}{c} d_a{}^2 + d_b{}^2 + d_c{}^2 \ge \dfrac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow \dfrac{d_a}{a} = \dfrac{d_b}{b} = \dfrac{d_c}{c} \Leftrightarrow P \equiv L(\text{Lemoine}) \end{array}}.$$

2.5. Nhóm quan hệ 5

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất (khá đầy đủ) các mối liên hệ giữa $a,\ b,\ c$, $R_a,\ R_b,\ R_c$, $S_a,\ S_b,\ S_c,\ S$, gọi tắt là

<u>Nhóm quan hệ:</u> $\boxed{(a,\ R_a)}$

Suy luận.

- Ta có

$$R_a + R_b > c,\ R_b + R_c > a,\ R_c + R_a > b.$$

Suy ra

$$2(R_a + R_b + R_c) > a + b + c \text{ hay } R_a + R_b + R_c > \frac{a+b+c}{2} = p.$$

- Ta có

$$R_a + R_b < R_a + (r_a + a_1) = (R_a + r_a) + a_1 = k_a + a_1$$

$$< (b + a_2) + a_1 = b + (a_2 + a_1) = b + a.$$

Tương tự, ta có

$$R_a + R_b < a + b,\ R_b + R_c < b + c,\ R_c + R_a < c + a.$$

Suy ra

$$2(R_a + R_b + R_c) < 2(a + b + c) \text{ hay } R_a + R_b + R_c < a + b + c = 2p.$$

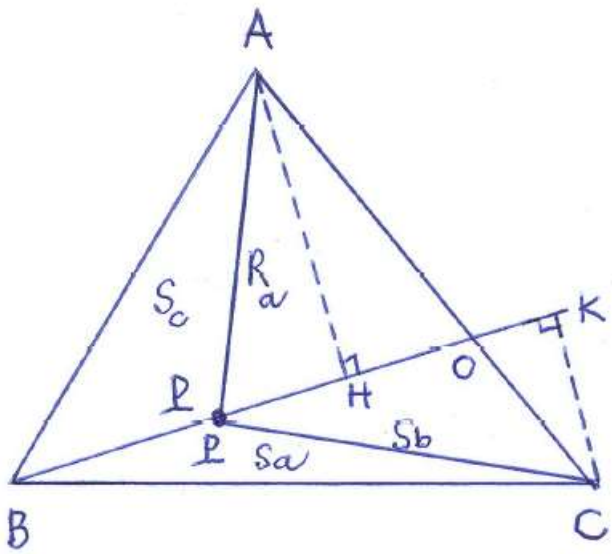
Ta thiết lập được bất đẳng thức sau đây

Bất đẳng thức 31.

$$\boxed{p < R_a + R_b + R_c < 2p}$$

Bài toán 3. *Tìm điểm P trong tam giác nhọn ABC sao cho tổng* $aR_a + bR_b + cR_c$ *đạt giá trị nhỏ nhất*

Giải.



Ta có

$$2S_c = R_b.AH \le R_b.AD\,,\; 2S_a = R_b.CK \le R_b.CD\,.$$

Suy ra

$$2\left(S_c + S_a\right) \le R_b.AC = bR_b\,.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các đường thẳng AH, CK, CA trùng nhau hay BP vuông góc với CA.

Tương tự, ta có

$$2\left(S_c + S_a\right) \le bR_b\,,\; 2\left(S_a + S_b\right) \le cR_c\,,\; 2\left(S_b + S_c\right) \le aR_a\,.$$

Suy ra

$$aR_a + bR_b + cR_c \ge 4\left(S_a + S_b + S_c\right) = 4S\,.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng $aR_a + bR_b + cR_c$ là $4S$, đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} BP \perp CA \\ CP \perp AB \\ AP \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow P \equiv H\,.$$

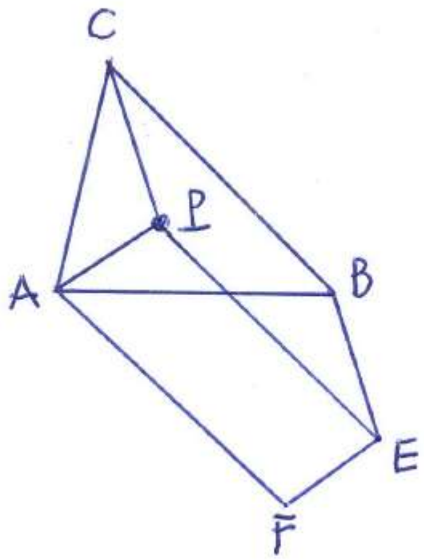
Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 32.

$$\boxed{\begin{array}{l} aR_a + bR_b + cR_c \ge 4S \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow P \equiv H \end{array}}\,.$$

Bài toán 4. *Tìm điểm P trong tam giác nhọn ABC sao cho tổng* $aR_bR_c + bR_cR_a + cR_aR_b$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Giải.



Giả sử E và F là các điểm sao cho BCPE và BCAF là các hình bình hành.

Suy ra EPAF cũng là hình bình hành. Do đó

$$BC = EP = FA = a,\ CA = BF = b,\ PA = EF = R_a,\ PC = EB = R_c.$$

Áp dụng Bất đẳng thức Ptolemy đối với tứ giác ABEF, ta có

$$AB.EF + AF.BE \geq BF.AE \Leftrightarrow c.R_a + a.R_c \geq b.AE.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tứ giác ABEF nội tiếp.

Áp dụng Bất đẳng thức Ptolemy đối với tứ giác AEBP, ta có

$$BP.AE + BE.AP \geq AB.EP \Leftrightarrow R_b.AE + R_c.R_a \geq ca.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tứ giác AEBP nội tiếp.

Suy ra

$$aR_bR_c + bR_cR_a + cR_aR_b = \left(aR_bR_c + cR_aR_b\right) + bR_cR_a = R_b\left(aR_c + cR_a\right) + bR_cR_a$$

$$\geq R_b\left(b.AE\right) + bR_cR_a = b\left(R_b.AE + R_cR_a\right) \geq bca$$

hay

$$aR_bR_c + bR_cR_a + cR_aR_b \geq abc.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng $aR_bR_c + bR_cR_a + cR_aR_b$ là abc, đạt được khi và chỉ khi các tứ giác ABEF và AEBP nội tiếp.

Vì các tứ giác ABEF và AEBP nội tiếp, nên suy ra tứ giác AFEP cũng nội tiếp. Suy ra tứ giác AFEP là hình chữ nhật. Suy ra $AP \perp EP$ hay $AP \perp BC$.

Vì tứ giác AEBP nội tiếp, nên $ABE = APE$. Suy ra $BE \perp AB$ hay $CP \perp AB$.

Vì $AP \perp BC$ và $CP \perp AB$, nên $P \equiv H$.

Vậy, với ABC là tam giác nhọn, a thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 33.

$$\boxed{\begin{array}{c} aR_bR_c + bR_cR_a + cR_aR_b \geq abc \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow P \equiv H \end{array}}$$

Nhận xét. Bất đẳng thức này còn có một cách chứng minh khác, theo suy luận từ bổ đề sau đây.

Bổ đề 1. *Nếu* $f(a,\ b,\ c,\ R_a,\ R_b,\ R_c) \geq 0$ *thì* $f(aR_a,\ bR_b,\ cR_c,\ R_bR_c,\ R_cR_a,\ R_aR_b) \geq 0$.

Nhận xét. Người ta đã chứng minh rằng, trong Bổ đề 1, nếu bất đẳng thức

$$f(a,\ b,\ c,\ R_a,\ R_b,\ R_c) \geq 0$$

xảy ra dấu đẳng thức khi $P \equiv I$, thì bất đẳng thức

$$f(aR_a,\ bR_b,\ cR_c,\ R_bR_c,\ R_cR_a,\ R_aR_b) \geq 0$$

xảy ra dấu đẳng thức khi tam giác ABC nhọn và $P \equiv H$.

Suy luận.

Theo Bất đẳng thức Klamkin, một bất đẳng thức kinh điển, với mọi số thực $x,\ y,\ z$ và P là điểm tùy ý trong mặt phẳng (ABC), ta có

$$(x+y+z)\left(xR_a^{\ 2} + yR_b^{\ 2} + zR_c^{\ 2}\right) \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2 .$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x : y : z = \overrightarrow{S_a} : \overrightarrow{S_b} : \overrightarrow{S_c}$, trong đó ký hiệu $\overrightarrow{S_a},\ \overrightarrow{S_b},\ \overrightarrow{S_c}$ để chỉ diện tích đại số lần lượt của các tam giác có hướng $\overline{PBC}$, $\overline{PCA}$, $\overline{PAB}$ (Lưu ý: kiến thức này mang tính tham khảo, để mở rộng thêm, vì chỉ phù hợp ở bậc Trung học phổ thông).

Bây giờ, giả sử rằng $x, y, z > 0$ và P không trùng với đỉnh tam giác.

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{(x+y+z)\left(xR_a{}^2+yR_b{}^2+zR_c{}^2\right)}{xyz}\geq\frac{yza^2+zxb^2+xyc^2}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}\right)\left(xR_a{}^2+yR_b{}^2+zR_c{}^2\right)\geq\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}.$$

Ngoài ra, theo Bất đẳng thức 12 , ta có

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a:b:c=x:y:z$.

Do đó, ta có

$$\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}\right)\left(xR_a{}^2+yR_b{}^2+zR_c{}^2\right)\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a:b:c=x:y:z\\ P\equiv I\end{cases}.$$

Áp dụng Bổ đề 1 cho bất đẳng thức trên, ta có

$$\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}\right)\left(x(R_bR_c)^2+y(R_cR_a)^2+z(R_aR_b)^2\right)\geq\frac{(aR_a+bR_b+cR_c)^2}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x+y+z}{xyz}\right)\left(x(R_bR_c)^2+y(R_cR_a)^2+z(R_aR_b)^2\right)\geq\frac{(aR_a+bR_b+cR_c)^2}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(R_bR_c)^2+y(R_cR_a)^2+z(R_aR_b)^2}{xyz}\geq\left(\frac{aR_a+bR_b+cR_c}{x+y+z}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{(R_bR_c)^2}{yz}+\frac{(R_cR_a)^2}{zx}+\frac{(R_aR_b)^2}{xy}\geq\left(\frac{aR_a+bR_b+cR_c}{x+y+z}\right)^2.$$

Trong bất đẳng thức trên, thay x bởi $xR_a{}^2$, y bởi $yR_b{}^2$, z bởi $zR_c{}^2$, ta có

$$\frac{(R_bR_c)^2}{yz(R_bR_c)^2}+\frac{(R_cR_a)^2}{zx(R_bR_c)^2}+\frac{(R_aR_b)^2}{xy(R_bR_c)^2}\geq\left(\frac{aR_a+bR_b+cR_c}{xR_a{}^2+yR_b{}^2+zR_c{}^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy} \ge \left(\frac{aR_a+bR_b+cR_c}{xR_a^2+yR_b^2+zR_c^2}\right)^2.$$

Trong bất đẳng thức trên, thay x bởi $\frac{1}{x}$, y bởi $\frac{1}{y}$, z bởi $\frac{1}{z}$, ta có

$$yz+zx+xy \ge \left(\frac{aR_a+bR_b+cR_c}{\frac{R_a^2}{x}+\frac{R_b^2}{y}+\frac{R_c^2}{z}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{R_a^2}{x}+\frac{R_b^2}{y}+\frac{R_c^2}{z} \ge \frac{aR_a+bR_b+cR_c}{\sqrt{yz+zx+xy}}.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

$$\frac{R_a^2}{x}+\frac{R_b^2}{y}+\frac{R_c^2}{z} \ge \frac{aR_a+bR_b+cR_c}{\sqrt{yz+zx+xy}}.$$

Với Nhận xét ở Bổ đề 1, ta thấy rằng đẳng thức trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi

tam giác ABC nhọn, $P \equiv H$, $a:b:c = x:y:z = \overrightarrow{S_a}:\overrightarrow{S_b}:\overrightarrow{S_c}$

$\Leftrightarrow$tam giác ABC nhọn, $P \equiv H$, $\frac{R_a}{xa}=\frac{R_b}{yb}=\frac{R_c}{zc}$

$\Leftrightarrow$ tam giác ABC nhọn, $P \equiv H$, $x:y:z = \cos A:\cos B:\cos C$

$\Leftrightarrow$ tam giác ABC nhọn, $P \equiv H$, $x:y:z = \cot A:\cot B:\cot C$.

- *Dễ thấy rằng, với $x,y,z>0$ và P trùng với một đỉnh của tam giác, chẳng hạn đỉnh A, thì bất đẳng thức trên vẫn đúng.*

Tóm lại, với $x,y,z>0$ và P tùy ý, ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 34.

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{R_a^2}{x}+\frac{R_b^2}{y}+\frac{R_c^2}{z} \ge \frac{aR_a+bR_b+cR_c}{\sqrt{yz+zx+xy}} \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow \begin{cases} ABC \text{ nhon} \\ P \equiv H \\ x:y:z=\cot A:\cot B:\cot C \end{cases} \end{array}}$$

Trong bất đẳng thức trên, thay x bởi $\frac{R_a}{a}$, y bởi $\frac{R_b}{b}$, z bởi $\frac{R_c}{c}$, ta có

$$aR_a + bR_b + cR_c \geq \frac{aR_a + bR_b + cR_c}{\sqrt{\frac{R_bR_c}{bc} + \frac{R_cR_a}{ca} + \frac{R_aR_b}{ab}}} \Leftrightarrow \frac{R_bR_c}{bc} + \frac{R_cR_a}{ca} + \frac{R_aR_b}{ab} \geq 1.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 35.

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{R_bR_c}{bc} + \frac{R_cR_a}{ca} + \frac{R_aR_b}{ab} \geq 1 \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow \begin{cases} ABC \text{ nhon} \\ P \equiv H \end{cases} \end{array}}.$$

Suy luận. Nếu $P \equiv O$, ta có

$$\frac{R_bR_c}{bc} + \frac{R_cR_a}{ca} + \frac{R_aR_b}{ab} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{R^2}{bc} + \frac{R^2}{ca} + \frac{R^2}{ab} \geq 1 \Leftrightarrow R^2\left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow R^2(a+b+c) \geq abc \Leftrightarrow R^2 \geq \frac{abc}{a+b+c} = \frac{abc}{2p} = \frac{abc}{4R}.\frac{4R}{2p} = S.\frac{2R}{p} = pr.\frac{2R}{p} = 2Rr$$

$$\Leftrightarrow R \geq 2r.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 36.

$$\boxed{R \geq 2r}.$$

Suy luận.

Áp dụng Bất đẳng thức 3 và Bất đẳng thức 35, ta có

$$\left(\frac{R_a}{a} + \frac{R_b}{b} + \frac{R_c}{c}\right)^2 \geq 3\left(\frac{R_bR_c}{bc} + \frac{R_cR_a}{ca} + \frac{R_aR_b}{ab}\right) \geq 3.1 = 3.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 37.

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{R_a}{a} + \frac{R_b}{b} + \frac{R_c}{c} \geq \sqrt{3} \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow \begin{cases} ABC \text{ nhon} \\ P \equiv H \end{cases} \end{array}}.$$

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC có trọng tâm G và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Gọi* R_1, R_2, R_3 *lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác GBC, GCA, GAB. Chứng minh*

$$\boxed{R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R}.$$

Giải. Theo Bất đẳng thức 35, ta có

$$aR_bR_c + bR_cR_a + cR_aR_b \geq abc.$$

Khi $P \equiv G$, ta có

$$S_a = \frac{aR_bR_c}{4R_1} \Leftrightarrow aR_bR_c = 4R_1S_a = 4R_1\frac{S}{3} = \frac{4}{3}R_1S.$$

Tương tự, ta có

$$aR_bR_c = \frac{4}{3}R_1S,\ bR_cR_a = \frac{4}{3}R_2S,\ cR_aR_b = \frac{4}{3}R_3S.$$

Ngoài ra, ta biết rằng

$$S = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow abc = 4RS.$$

Do đó

$$aR_bR_c + bR_cR_a + cR_aR_b \geq abc \Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(R_1 + R_2 + R_3\right)S \geq 4RS \Leftrightarrow R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 38.

$$\boxed{R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R}.$$

Suy luận.

Ta có

$$aR_a \geq bd_c + cd_b \Leftrightarrow \frac{aR_a}{a^{n+1}} \geq \frac{bd_c}{a^{n+1}} + \frac{cd_b}{a^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{R_a}{a^n} \geq \frac{bd_c}{a^{n+1}} + \frac{cd_b}{a^{n+1}}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{R_a}{a^n} \geq d_b.\frac{c}{a^{n+1}} + d_c.\frac{b}{a^{n+1}},\ \frac{R_b}{b^n} \geq d_c.\frac{a}{b^{n+1}} + d_a.\frac{c}{b^{n+1}},\ \frac{R_c}{c^n} \geq d_a.\frac{b}{c^{n+1}} + d_b.\frac{a}{c^{n+1}}.$$

Suy ra

$$\frac{R_a}{a^n}+\frac{R_b}{b^n}+\frac{R_c}{c^n}\ge d_a\left(\frac{b}{c^{n+1}}+\frac{c}{b^{n+1}}\right)+d_b\left(\frac{c}{a^{n+1}}+\frac{a}{c^{n+1}}\right)+d_c\left(\frac{a}{b^{n+1}}+\frac{b}{a^{n+1}}\right)$$

$$\overset{\text{AM-GM}}{\ge} d_a.\frac{2}{\sqrt{b^nc^n}}+d_b.\frac{2}{\sqrt{c^na^n}}+d_c.\frac{2}{\sqrt{a^nb^n}}=\frac{2ad_a}{a\sqrt{b^nc^n}}+\frac{2bd_b}{b\sqrt{c^na^n}}+\frac{2cd_c}{c\sqrt{a^nb^n}}$$

$$=4\left(\frac{S_a}{a\sqrt{b^nc^n}}+\frac{S_b}{b\sqrt{c^na^n}}+\frac{S_c}{c\sqrt{a^nb^n}}\right).$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 39.

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{R_a}{a^n}+\dfrac{R_b}{b^n}+\dfrac{R_c}{c^n}\ge 4\left(\dfrac{S_a}{a\sqrt{b^nc^n}}+\dfrac{S_b}{b\sqrt{c^na^n}}+\dfrac{S_c}{c\sqrt{a^nb^n}}\right),\ n\ge 1\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta ABC \text{ deu}\\ P\equiv O\end{cases}\end{array}}.$$

- Với $n=1$, ta có

$$\frac{R_a}{a}+\frac{R_b}{b}+\frac{R_c}{c}\ge 4\left(\frac{S_a}{a\sqrt{bc}}+\frac{S_b}{b\sqrt{ca}}+\frac{S_c}{c\sqrt{ab}}\right)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{abc}}\left(\frac{S_a}{\sqrt{a}}+\frac{S_b}{\sqrt{b}}+\frac{S_c}{\sqrt{c}}\right)\overset{\text{BDT15}}{\ge}\frac{4}{\sqrt{abc}}.\frac{\left(\sqrt{S_a}+\sqrt{S_b}+\sqrt{S_c}\right)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}.$$

- Với $n=2$, ta có

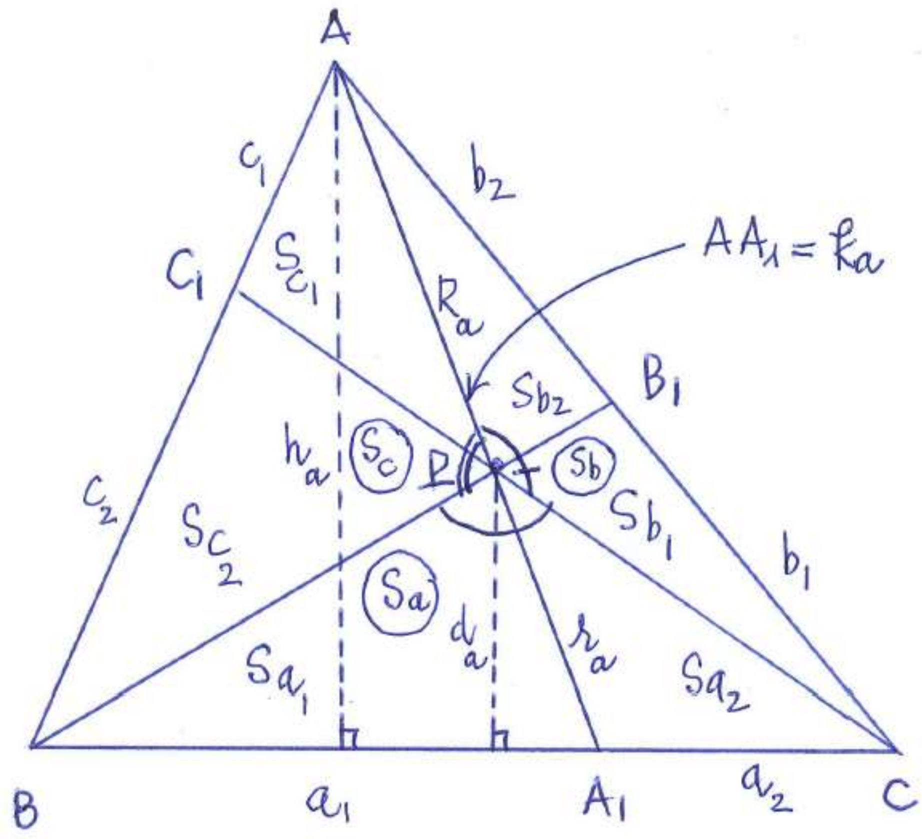
$$\frac{R_a}{a^2}+\frac{R_b}{b^2}+\frac{R_c}{c^2}\ge 4\left(\frac{S_a}{abc}+\frac{S_b}{abc}+\frac{S_c}{abc}\right)=\frac{4S}{abc}=\frac{1}{R}.$$

Như đã biết, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và P trùng với tâm tam giác.

2.6. Nhóm quan hệ 6

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu và đề xuất (khá đầy đủ) các mối liên hệ giữa diện tích một số tam giác đặc biệt, gọi tắt là

<u>Nhóm quan hệ:</u> $\boxed{(S_i,\ S)}$



Ký hiệu

$$\boxed{S(B_1AC_1)=\overline{S}_a},\ \boxed{S(C_1BA_1)=\overline{S}_b},\ \boxed{S(A_1CB_1)=\overline{S}_c},\ \boxed{S(A_1B_1C_1)=S^*}.$$

Suy luận.

Đặt

$$\overline{a}=\frac{a_1}{a_2},\ \overline{b}=\frac{b_1}{b_2},\ \overline{c}=\frac{c_1}{c_2}.$$

Suy ra

$$1+\overline{a}=\frac{a}{a_2},\ 1+\overline{b}=\frac{b}{b_2},\ 1+\overline{c}=\frac{c}{c_2}.$$

Theo Định lý Ceva, ta có

$$\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}=1.$$

Ngoài ra, ta có

$$\frac{\overline{S}_a}{S}=\frac{b_2}{b}.\frac{c_1}{c}=\frac{1}{\left(\frac{b}{b_2}\right)}.\frac{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)}{\left(\frac{c}{c_2}\right)}=\frac{\overline{c}}{\left(1+\overline{b}\right)\left(1+\overline{c}\right)}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{\overline{S}_a}{S}=\frac{\overline{c}}{\left(1+\overline{b}\right)\left(1+\overline{c}\right)},\ \frac{\overline{S}_b}{S}=\frac{\overline{a}}{\left(1+\overline{c}\right)\left(1+\overline{a}\right)},\ \frac{\overline{S}_c}{S}=\frac{\overline{b}}{\left(1+\overline{a}\right)\left(1+\overline{b}\right)}.$$

Suy ra

$$\frac{S^*}{S}=\frac{S-\left(\overline{S}_a+\overline{S}_b+\overline{S}_c\right)}{S}=1-\left(\frac{\overline{S}_a}{S}+\frac{\overline{S}_b}{S}+\frac{\overline{S}_c}{S}\right)$$

$$=1-\left(\frac{\overline{c}}{\left(1+\overline{b}\right)\left(1+\overline{c}\right)}+\frac{\overline{a}}{\left(1+\overline{c}\right)\left(1+\overline{a}\right)}+\frac{\overline{b}}{\left(1+\overline{a}\right)\left(1+\overline{b}\right)}\right)$$

$$=1-\frac{\overline{c}\left(1+\overline{a}\right)+\overline{a}\left(1+\overline{b}\right)+\overline{b}\left(1+\overline{c}\right)}{\left(1+\overline{a}\right)\left(1+\overline{b}\right)\left(1+\overline{c}\right)}=\frac{\left(1+\overline{a}\right)\left(1+\overline{b}\right)\left(1+\overline{c}\right)-\overline{c}\left(1+\overline{a}\right)+\overline{a}\left(1+\overline{b}\right)+\overline{b}\left(1+\overline{c}\right)}{\left(1+\overline{a}\right)\left(1+\overline{b}\right)\left(1+\overline{c}\right)}$$

$$=\frac{1+\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}}{\left(1+\overline{a}\right)\left(1+\overline{b}\right)\left(1+\overline{c}\right)}=\frac{2}{\left(1+\overline{a}\right)\left(1+\overline{b}\right)\left(1+\overline{c}\right)}\overset{\text{AM-GM}}{\leq}\frac{2}{\left(2\sqrt{\overline{a}}\right)\left(2\sqrt{\overline{b}}\right)\left(2\sqrt{\overline{c}}\right)}=\frac{1}{4\sqrt{\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}}}=\frac{1}{4}.$$

Suy ra

$$S^*\leq\frac{S}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

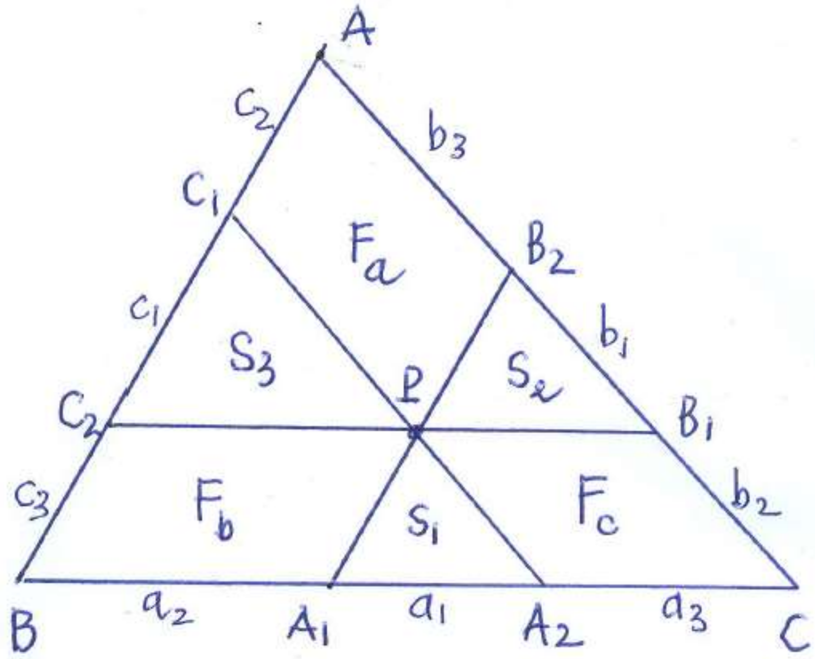
$$\overline{a}=\overline{b}=\overline{c}=1\Leftrightarrow P\equiv G.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 40.

$$\boxed{\begin{array}{c} S^*\leq\dfrac{S}{4} \\ \text{DTXR}\Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}.$$

Suy luận.



Các tam giác có diện tích S_1, S_2, S_3 (hình vẽ) đồng dạng với tam giác ABC theo trường hợp g-g-g. Suy ra

$$\frac{S_1}{S}=\left(\frac{a_1}{a}\right)^2,\ \frac{S_2}{S}=\left(\frac{PB_1}{a}\right)^2=\left(\frac{a_3}{a}\right)^2,\ \frac{S_3}{S}=\left(\frac{PC_2}{a}\right)^2=\left(\frac{a_2}{a}\right)^2.$$

hay

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}=\frac{a_1}{a}+\frac{a_3}{a}+\frac{a_2}{a}=\frac{a_1+a_2+a_3}{a}=\frac{a}{a}=1.$$

Ta thiết lập được đẳng thức sau

Đẳng thức 5.

$$\boxed{\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}=1}\Leftrightarrow\boxed{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}=\sqrt{S}}.$$

Suy luận.

Bởi Bất đẳng thức 4 và Đẳng thức 5, ta có

$$\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2\le 3\left(S_1+S_2+S_3\right)\Leftrightarrow S_1+S_2+S_3\ge\frac{\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2}{3}=\frac{\left(\sqrt{S}\right)^2}{3}=\frac{S}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{S_1} = \sqrt{S_2} = \sqrt{S_3} \Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow P \equiv G.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 41.

$$\boxed{\begin{array}{l} S_1 + S_2 + S_3 \geq \dfrac{S}{3} \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow P \equiv G \end{array}}.$$

Nhận xét. Nếu đặt

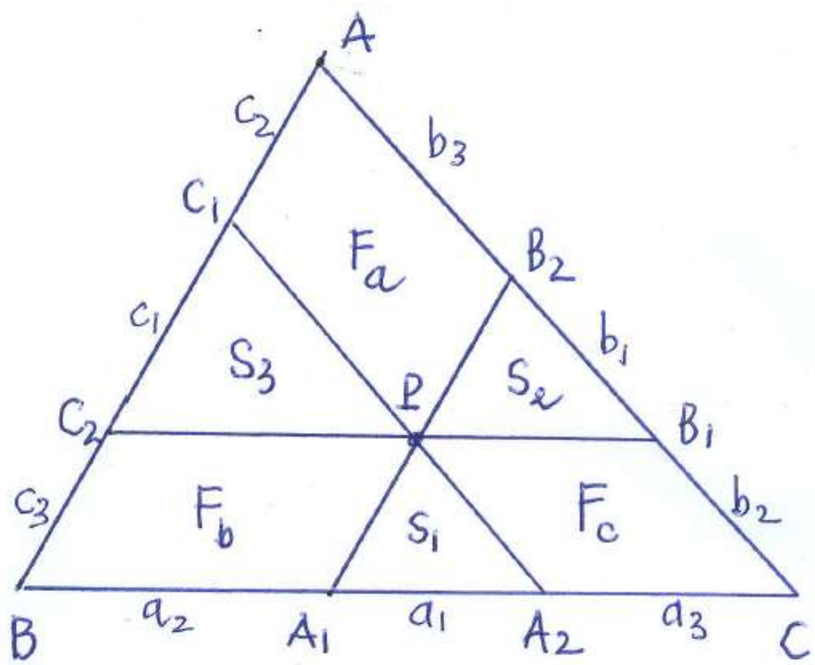
$$x = \sqrt{\frac{S_1}{S}},\ y = \sqrt{\frac{S_2}{S}},\ z = \sqrt{\frac{S_3}{S}},$$

thì ta có

$$\boxed{\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}}.$$

Ta có thể thiết lập nhiều bài toán hình học, như đã biết.

Suy luận.



Ta có

$$\boxed{\frac{S_c}{S_b} = \frac{a_1}{a_2} = x},\ \boxed{\frac{S_a}{S_c} = \frac{b_1}{b_2} = y},\ \boxed{\frac{S_b}{S_a} = \frac{c_1}{c_2} = z}.$$

Ta thiết lập được đẳng thức sau

Đẳng thức 6.

$$\boxed{\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}}.$$

Từ các đẳng thức trên, ta có

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{x}, \ \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{y}, \ \frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{z}.$$

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{x}{x+1} \text{ hay } \frac{a_1}{a} = \frac{x}{x+1}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{a_1}{a} = \frac{x}{x+1}, \ \frac{b_1}{b} = \frac{y}{y+1}, \ \frac{c_1}{c} = \frac{z}{z+1}.$$

Hơn nữa, ta có

$$\frac{a_2}{a_1 + a_2} = \frac{1}{x+1} \text{ hay } \frac{a_2}{a} = \frac{1}{x+1}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{a_2}{a} = \frac{1}{x+1}, \ \frac{b_2}{b} = \frac{1}{y+1}, \ \frac{c_2}{c} = \frac{1}{z+1}.$$

Theo tính chất đã biết, ta có

$$\frac{S_1}{S} = \frac{b_2}{b} \cdot \frac{c_1}{c} = \frac{1}{y+1} \cdot \frac{z}{z+1} = \frac{z}{(y+1)(z+1)}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{S_1}{S} = \frac{z}{(y+1)(z+1)}, \ \frac{S_2}{S} = \frac{x}{(z+1)(x+1)}, \ \frac{S_3}{S} = \frac{y}{(x+1)(y+1)}.$$

Suy ra

$$\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = \frac{z}{(y+1)(z+1)} + \frac{x}{(z+1)(x+1)} + \frac{y}{(x+1)(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{z}{(y+1)(z+1)} + \frac{x}{(z+1)(x+1)} + \frac{y}{(x+1)(y+1)}.$$

Ta thiết lập được đẳng thức sau

Đẳng thức 7.

$$\boxed{\frac{S_1+S_2+S_3}{S}=\frac{x}{(z+1)(x+1)}+\frac{y}{(x+1)(y+1)}+\frac{z}{(y+1)(z+1)}}.$$

Đẳng thức 7 tương đương với

$$\frac{S-S_{A_1B_1C_1}}{S}=\frac{z}{(y+1)(z+1)}+\frac{x}{(z+1)(x+1)}+\frac{y}{(x+1)(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S}=\frac{z}{(y+1)(z+1)}+\frac{x}{(z+1)(x+1)}+\frac{y}{(x+1)(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S}=1-\frac{z}{(y+1)(z+1)}-\frac{x}{(z+1)(x+1)}-\frac{y}{(x+1)(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S}=\frac{(x+1)(y+1)(z+1)-z(x+1)-x(y+1)-y(z+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

$$=\frac{xyz+(xy+yz+zx)+(x+y+z)+1-(xy+yz+zx)-(x+y+z)}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

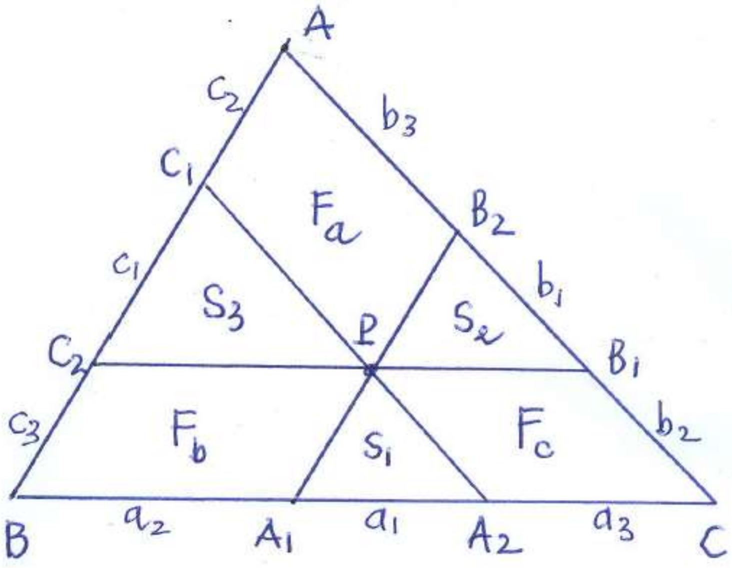
$$=\frac{1+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}=\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

Ta thiết lập được đẳng thức sau

Đẳng thức 8.

$$\boxed{\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S}=\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}}.$$

Suy luận.



Xét tam giác APC_2, ta có

$$\frac{\left(\frac{1}{2}F_a\right)}{S_3} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Xét tam giác AC_2B_1, ta có

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{PB_1}{PC_2}.$$

Xét các tam giác PB_2B_1 và PC_1C_2

$$\frac{PB_1}{PC_2} = \sqrt{\frac{S_2}{S_3}}.$$

Suy ra

$$\frac{F_a}{2S_3} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{PB_1}{PC_2} = \sqrt{\frac{S_2}{S_3}}.$$

Ta có

$$\frac{F_a}{2S_3} = \sqrt{\frac{S_2}{S_3}} \Leftrightarrow F_a = 2\sqrt{S_2S_3}.$$

Vậy

$$F_a = 2\sqrt{S_2S_3}.$$

Tương tự

$$F_a = 2\sqrt{S_2S_3}\,,\ F_b = 2\sqrt{S_3S_1}\,,\ F_c = 2\sqrt{S_1S_2}\,.$$

Ta thiết lập được đẳng thức sau

Đẳng thức 9.

$$\boxed{F_a + F_b + F_c = 2\left(\sqrt{S_1S_2} + \sqrt{S_2S_3} + \sqrt{S_3S_1}\right)}\,.$$

Từ các đẳng thức trên, ta có thể thiết lập hoặc giải được nhiều bài toán, chẳng hạn.

Bài toán 6. *Chứng minh rằng*

$$\boxed{\frac{S_1}{F_a} + \frac{S_2}{F_b} + \frac{S_3}{F_c} \ge \frac{3}{2}}\,.$$

Giải. Ta có

$$\frac{S_1}{F_a} + \frac{S_2}{F_b} + \frac{S_3}{F_c} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{S_1}{2\sqrt{S_2S_3}} + \frac{S_2}{2\sqrt{S_3S_1}} + \frac{S_3}{2\sqrt{S_1S_2}} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{S_1\sqrt{S_1} + S_2\sqrt{S_2} + S_3\sqrt{S_3}}{2\sqrt{S_1S_2S_3}} \ge \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow S_1\sqrt{S_1} + S_2\sqrt{S_2} + S_3\sqrt{S_3} \ge 3\sqrt{S_1S_2S_3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{S_1}\right)^3 + \left(\sqrt{S_2}\right)^3 + \left(\sqrt{S_3}\right)^3 \ge 3\sqrt{S_1}.\sqrt{S_2}.\sqrt{S_3}\,.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là đúng, theo dạng Bất đẳng thức AM-GM.

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$S_1 = S_2 = S_3.$$

Khi đó, từ các đẳng thức

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{S_2}{S_3}} = 1,\ \frac{c_3}{c_2} = \sqrt{\frac{S_3}{S_1}} = 1,\ \frac{c_1}{c_3} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = 1,$$

ta có

$$S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 \Leftrightarrow \frac{AP}{AA_1} = \frac{2}{3}.$$

Vậy, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 \\ b_1 = b_2 = b_3 \\ c_1 = c_2 = c_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{AP}{AA_1} = \frac{2}{3},\ \frac{BP}{BB_1} = \frac{2}{3},\ \frac{CP}{CC_1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P \equiv G\,.$$

Ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 42.

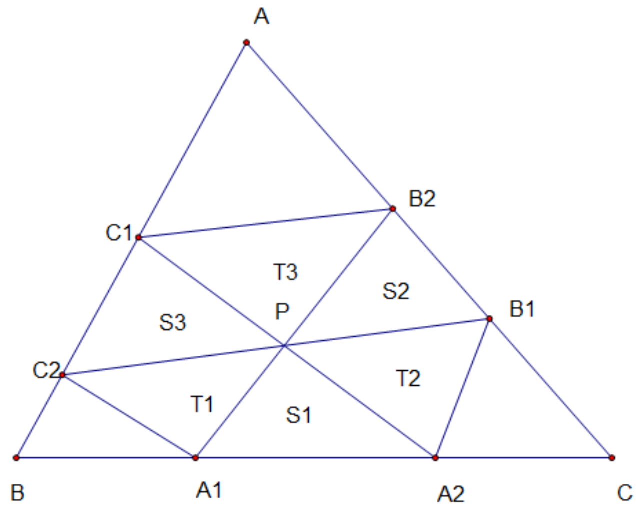
$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{S_1}{F_a}+\dfrac{S_2}{F_b}+\dfrac{S_3}{F_c}\ge\dfrac{3}{2}\\ \text{DTXR}\Leftrightarrow P\equiv G\end{array}}$$

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC và điểm P nằm trong tam giác đó. Qua P, kẻ các đường thẳng* B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2 *(như hình vẽ). Đặt*

$$S(A_1PA_2)=S_1,\ S(B_1PB_2)=S_2,\ S(C_1PC_2)=S_3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}.$$



Giải.

Ta có thể chứng minh được đẳng thức sau

Đẳng thức 10.

$$\boxed{S_1S_2S_3=T_1T_2T_3}.$$

Áp dụng Đẳng thức 10 và Bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{S_1S_2S_3}}=\frac{3}{\sqrt[6]{(S_1S_2S_3)^2}}=\frac{3}{\sqrt[6]{S_1S_2S_3T_1T_2T_3}}$$

$$\geq \frac{3}{\frac{1}{6}\left(S_1+S_2+S_3+T_1+T_2+T_3\right)} = \frac{18}{S_1+S_2+S_3+T_1+T_2+T_3} \geq \frac{18}{S}.$$

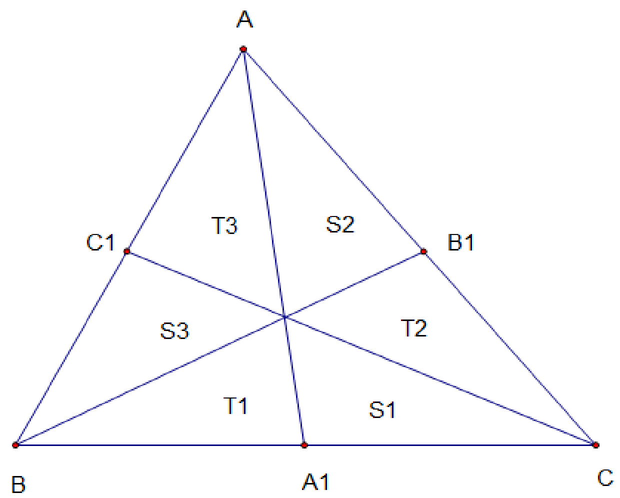
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}$$

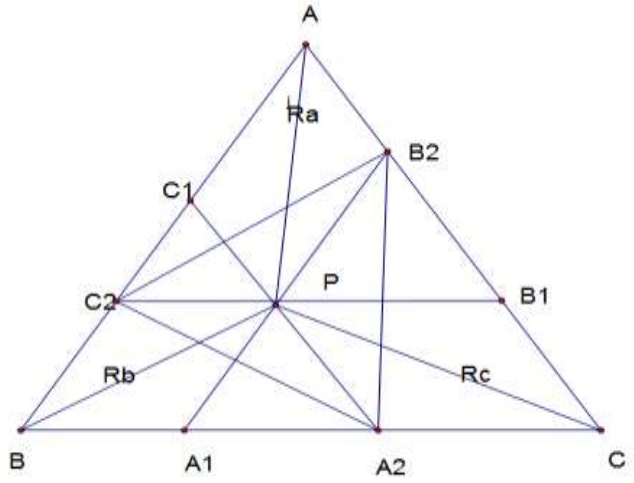
là $\frac{18}{S}$, đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} S_1=S_2=S_3=T_1=T_2=T_3 \\ S_1+S_2+S_3+T_1+T_2+T_3=S \end{cases} \Leftrightarrow S_1=S_2=S_3=T_1=T_2=T_3=\frac{S}{6}$$

$\Leftrightarrow P \equiv G$ và AA_1, BB_1, CC_1 là các trung tuyến, $A_2 \equiv C$, $B_2 \equiv A$, $C_2 \equiv B$.



Bài toán 8. *Cho tam giác đều ABC và điểm P nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng* R_a, R_b, R_c *là độ dài ba cạnh của một tam giác và diện tích tam giác này không lớn hơn* $\frac{S}{3}$.



Giải. a) Qua P, dựng các đường thẳng B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2 song song với ba cạnh của tam giác (hình vẽ).

PB_2AC_2 là hình thang cân $\Rightarrow R_a = B_2C_2$,

PC_2BA_2 là hình thang cân $\Rightarrow R_b = C_2A_2$,

PA_2CB_2 là hình thang cân $\Rightarrow R_c = A_2B_2$.

Vậy R_a, R_b, R_c là độ dài ba cạnh của tam giác $A_2B_2C_2$.

b) Áp dụng Bất đẳng thức 40, ta có

$$S(A_2B_2C_2) = S(A_2PB_2) + S(B_2PC_2) + S(C_2PA_2) = S(A_2PC) + S(B_2PA) + S(C_2PB)$$

$$= \frac{1}{2}\left(S(A_2PB_1C) + S(B_2PC_1A) + S(C_2PA_1B)\right) = \frac{1}{2}\left(S - (S_1 + S_2 + S_3)\right) \le \frac{1}{2}\left(S - \frac{S}{3}\right) = \frac{S}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv G \equiv O$.

Vậy, với tam giác đều ABC, ta thiết lập được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 43.

$$\boxed{\begin{array}{c} S(A_2B_2C_2) \le \dfrac{S}{3} \\ \text{DTXR} \Leftrightarrow P \equiv G \equiv O \end{array}}.$$

..........................HẾT............................